ترفندهای حل مسئله

داود معصومی مهوار

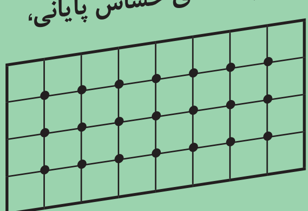
تناظرها یا نخ‌های متصل

فرزند درس‌خواندهٔ چوپان برای شمارش گوسفندها پاهای گوسفندها را می‌شمرد و عدد به دست آمده را بر ۴ تقسیم می‌کرد! استفادهٔ بد از سواد! اما توجه کنید که اگر گوسفندها در جایی باشند که حصاری بدون درز داشته باشد و تنها پایین حصار خالی باشد، راه فرزند چوپان خوب است. در این حالت تنها پاهای گوسفندها را می‌بینیم و از این تناظر یک به چهار کمک می‌گیریم. در ادامه می‌کوشیم تا در چند مسئله چنین تناظرهایی را ببینیم.

مسئلهٔ ۱

در مدرسهٔ حمید نوعی بازی دو نفره رایج است. کاغذی را به‌طور افقی و عمودی بارها خط کشی می‌کنند تا مستطیل‌های کوچکی (که آن‌ها را مستطیل‌های واحد می‌گوییم) در آن ساخته شود. نفر اول کاغذ را از روی یکی از خط‌های کشیده شده، دو تکه می‌کند. از این پس هر کس در نوبت خود می‌تواند یکی از تکه کاغذهای بریده شده را انتخاب کند و از روی یکی از خط‌های راست کشیده شده (حتماً باید هنوز خط داشته باشد.) برش دهد و کاغذ را دو تکه کند. برندهٔ این بازی نیز کسی است که آخرین برش را انجام دهد. حمید خیلی زود توانست در این بازی ماهر شود. او در هر بازی انتخاب می‌کرد که نفر شروع‌کننده باشد یا نفر دوم و همیشه برنده می‌شد. سیاست برد او چه بود؟

یک برش که زده می‌شود، ضلع‌های بعضی از مستطیل‌ها بریده می‌شوند. تعداد ضلع‌های مستطیل‌هایی که در یک برش بریده می‌شوند، ثابت نیست. حتی تعداد مستطیل‌های واحدی که در یک برش آزاد می‌شوند نیز ثابت نیست. در آغاز بازی چندین برش انجام می‌شود ولی هیچ مستطیل واحدی آزاد نمی‌شود. بلکه گروهی از مستطیل‌های واحد به هم چسبیده آزاد می‌شوند. ولی در حرکت‌های حساس پایانی، با هر برش ممکن است یک یا دو مستطیل واحد آزاد شوند. شاید کمکی نکند، اما در شکل زیر چیزی به ذهن می‌رسد. نقطه‌های درون شبکه را ببینید. خط برش قرار است از روی هر کدام از این نقطه‌ها دو بار بگذرد. البته گاهی یک خط برش یکباره از چند نقطه می‌گذرد و بار دیگر ممکن است تنها از یکی بگذرد. باور کنید این موضوع هیچ کمکی نمی‌کند، ولی نکتهٔ سادهٔ دیگری هست که باید ببینیم.



راهنمایی: نقطه‌های پررنگ شده، نظم و یکسانی مستطیل‌های شبکه و راستی خط‌های برش، همگی بی‌اهمیت هستند. تصور کنید که فاصلهٔ خط‌های عمودی یا افقی متفاوت بودند. یا برخی از آن‌ها کج بودند. یا حتی برخی از آن‌ها انحنا داشتند! در هیچ‌کدام از این حالت‌ها باز هم مسئله تغییر نمی‌کند. پس به دنبال چیز دیگری (یک تناظر) باشید.

مسئلهٔ ۲

در یک روستا تنها اسکناس‌های ۱۰۰۰ و ۲۰۰۰ تومانی هست و تا فصل درو پول دیگری به روستا نمی‌آید. تا آن موقع
همهٔ خریدهای اهل روستا در خود روستا و بین اهالی صورت می‌گیرد. پس گاهی اهالی روستا بین خودشان پول خرد
می‌کنند. هر بار که کسی پول خرد لازم دارد، دقیقاً یک دو هزار تومانی به یکی دیگر از اهالی روستا می‌دهد و دو تا
هزار تومانی از او می‌گیرد. این روستا ۱۳۹۶ نفر دارد که همگی پول دارند و تا فصل درو پول خرد می‌کنند. آیا ممکن
است که تا فصل درو در رخدادهای پول خرد کردن، هر نفر از روستا در مجموع درست ۱۰ تا اسکناس گرفته باشد؟
در هر رخداد پول خرد کردن، هر کس یک یا دو اسکناس می‌گیرد. شاید بخواهید عدد ۱۰ را به صورت مجموعی از
چند تا ۲ و چند تا ۱ بنویسید. مثلاً ۱۰=۲+۲+۲+۲+۲ مربوط به کسی است که ۵ بار دو هزار تومانی داده است و هر بار
دو تا هزار تومانی گرفته است. همچنین، ۱۰=۲+۲+۲+۲+۱+۱ مربوط به کسی است که چهار بار دو هزار تومانی خود را
خرد کرده و دو بار هم از دیگران دو هزار تومانی گرفته و ۴ تا هزار تومانی به آن‌ها داده است. نوشتن همهٔ حالت‌ها کار
سختی است، امّا هر ۱ باید با یک ۲ از شخصی دیگر نظیر باشد و برعکس.

راهنمایی: توجه کنید که تعداد اسکناس‌هایی که انتظار می‌رود هر کس تا فصل درو بگیرد، برای همه برابر ۱۰ است.
از طرف دیگر، در بررسی مسئله پی بردیم که در هر پول خرد کردن، یک نفر دو اسکناس می‌گیرد و نفر دیگر یک
اسکناس می‌گیرد. از همه مهم‌تر اینکه اهالی روستا ۱۳۹۶ نفر هستند.

حل مسئلهٔ ۱

در آغاز بازی هیچ برشی انجام نشده است، ولی یک تکه کاغذ هست. وقتی یک برش انجام
می‌شود، همین یک تکه کاغذ دو تکه می‌شود. توجه کنید، که تکه‌هایی که منظور ماست ممکن است
بزرگ باشند و هر یک در خود چندین مستطیل واحد داشته باشند. در روند بازی این رخداد تکرار می‌شود.
هر کس که یک برش انجام می‌دهد، یک تکه به تکه‌های موجود اضافه می‌کند. تا جایی که همهٔ تکه‌ها مستطیل‌های
واحد باشند که خط دیگری برای برش نداشته باشند. در این هنگام برنده مشخص شده است. اما تعداد این مستطیل‌های
واحد از همان آغاز بازی معلوم است. مثلاً اگر روی کاغذ مستطیل شکل ابتدایی ۹ خط عمودی و ۶ خط افقی کشیده
باشند، کاغذ به ۱۰×۷ مستطیل کوچک غیر قابل برش تقسیم می‌شود. یعنی در پایان بازی ۷۰ مستطیل برش خورده
خواهیم داشت. آغازگر بازی یک تکه را به دو تکه تبدیل می‌کند. نفر دیگر ۲ تکه را به ۳ تکه، آغازگر ۳ تکه را به ۴ تکه
تبدیل می‌کند.به همین ترتیب همیشه شخصی که آغازگر بازی بوده است، تعدادی فرد از تکه‌ها را می‌گیرد و تعدادی
زوج تحویل می‌دهد و شخص دیگر همیشه تعدادی زوج تحویل می‌گیرد و تعدادی فرد تحویل می‌دهد. پس کسی که در
پایان بازی ۶۹ تکه می‌گیرد و ۷۰ تکه تحویل می‌دهد، همان شخص آغازگر بازی است. یعنی اگر تعداد مستطیل‌های
غیر قابل برش زوج باشد، همیشه کسی که بازی را آغاز می‌کند خواهد برد. به همین ترتیب اگر این تعداد فرد باشد
(مثلاً خط‌های عمودی ۸ تا و خط‌های افقی ۶ باشند و کاغذ ۶۳=۹×۷ تا مستطیل واحد داشته باشد)، شخص آغازگر بازی
همیشه بازنده خواهد بود. در اینجا تناظر یک به یک برش‌ها و تکه‌های موجود را بررسی کردیم.

حل مسئلهٔ ۲

در هر رخداد پول خرد کردن ۳ تا اسکناس گرفته می‌شود. یک اسکناس
۲۰۰۰ تومانی و دو تا اسکناس ۱۰۰۰ تومانی. دو تا ۱۰۰۰ تومانی را یک نفر می‌گیرد
و یک ۲۰۰۰ تومانی را شخص دیگر می‌گیرد. هنگامی را تصور می‌کنیم که هر کس در پول خرد کردن‌ها،
۱۰ تا اسکناس گرفته باشد. در این صورت تعداد پول‌هایی که همه در رخداد پول خرد کردن گرفته‌اند باید برابر
باشد با: ۱۳۹۶۰=۱۰×۱۳۹۶. در آغاز هیچ‌کس هیچ پولی نگرفته است و تعداد پول‌هایی که همه گرفته‌اند، برابر
۰=۰×۱۳۹۶ است. از این پس پول خرد کردن رخ می‌دهد و روشن است که در هر رخداد پول خرد کردن، عدد ۳
به «تعداد پول‌های گرفته شده توسط همه» اضافه می‌شود. یعنی مجموع تعداد پول‌های گرفته شده توسط همه، همیشه
مضرب ۳ است و مسئله انتظار دارد که در پایان (آغاز فصل درو) این عدد برابر ۱۳۹۶۰ باشد. ولی این عدد بر ۳
بخش‌پذیر نیست. پس چنین چیزی هیچ‌گاه رخ نخواهد داد. در اینجا تناظر یک به سه را بین رخداد پول خرد کردن و
تعداد اسکناس‌های گرفته شده توسط دو طرف بررسی کردیم.